

Über die Entstehung der Turbulenz. 1. Mitteilung

by Tollmien, W.

in: Nachrichten von der Gesellschaft der
Wissenschaften zu Göttingen,
Mathematisch-Physikalische Kl...
Göttingen; 1895, 1933

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright.

Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Über die Entstehung der Turbulenz.

1. Mitteilung.

Von

W. Tollmien, Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.)

Vorgelegt von L. PRANDTL in der Sitzung vom 22. März 1929.

Bekanntlich sind bei geometrisch ähnlichen Begrenzungen die Strömungsformen von Flüssigkeiten und Gasen, soweit man vom Einfluß der Kompressibilität absehen kann, allein durch die REYNOLDSsche Zahl bestimmt, jene Dimensionslose, die sich aus einer charakteristischen Geschwindigkeit und Länge und der kinematischen Zähigkeit zusammensetzt. Die auffallendste und wichtigste Änderung der Strömungsformen mit der Reynoldsschen Zahl ist nun durch den schroffen Übergang vom laminaren in den turbulenten Strömungszustand gegeben. Aus zahlreichen Beobachtungen kennt man in vielen Fällen, z. B. bei der Strömung durch Rohre oder um eine Kugel die Reynoldssche Zahl dieses Überganges. Doch ist die summarische Angabe dieser „kritischen“ Reynoldsschen Zahl physikalisch unvollständig, da diese stark von den Störungen der ursprünglichen Laminarströmung abhängt. Von den Störungen besitzt man nun allenfalls die Angabe ihrer Erregungsstelle, z. B. bei der Rohrströmung, ob die Störungen vom Einlauf oder weiter stromab von den Wänden ausgehen, wo sie anscheinend weniger wirksam als im ersten Falle sind. Darüber hinaus sind die Störungen aber bisher experimentell nicht definiert und klassifiziert worden. Die Experimente geben deshalb nicht einmal Gewißheit darüber, in welchem Sinne man genau genommen von einer kritischen Reynoldsschen Zahl als einer oberen Grenze für das Bestehen der Laminarströmung sprechen kann, ob diese nicht vielleicht sich bis zu beliebig hohen Reynoldsschen Zahlen aufrecht erhalten läßt, wenn man nur die Größe der Störungen immer weiter herabsetzt.

Einen detaillierten Einblick in die Entstehung der Turbulenz konnte man wohl von einer photographischen Verfolgung des Strömungsumschlages erhoffen. Mehrfach wurde dabei eine Methode nach REYNOLDS angewandt, der die Strömung in Glasrohren mit Hilfe eines Farbfadens in der Rohrmittle beobachtete. L. PRANDTL¹⁾ suchte den Vorgang bei der ebenen Strömung in einem Gerinne durch Photographie der mit Aluminiumpulver bestreuten freien Oberfläche näher zu erfassen. Wohl gelang es mit diesen Mitteln, die Stelle des Strömungsumschlages räumlich einigermaßen festzulegen, z. B. für die Rohrströmung meist im sogenannten Anlaufgebiet, ähnlich, wie diese Feststellung in diesem und anderen Fällen auch aus Druck- und Geschwindigkeitsmessungen gelang. Im übrigen konnte man von den komplizierten Bildern nur eine Beschreibung in groben Zügen geben; der Mechanismus der Entstehung der Turbulenz konnte experimentell bisher nicht weiter klargelegt werden.

Jedenfalls setzt nach der üblichen Anschauung die Entstehung der Turbulenz mit dem Instabilwerden der Laminarströmung ein. Die einfachsten Annahmen zur theoretischen Erfassung dieses Vorganges gewinnt man, indem man eine ebene laminare Geschwindigkeitsverteilung voraussetzt, die zudem nur von der Koordinate quer zur Geschwindigkeitsrichtung abhängen möge, und dann dieses Geschwindigkeitsprofil ebenfalls zweidimensionalen Störungen unterwirft. Das erste Profil, das in dieser Art mit der Methode der kleinen Schwingungen behandelt wurde, war das der „Couette-Strömung“ mit linearer Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Querkoordinate. Das Resultat, das HOPF²⁾ und v. MISES³⁾ erhielten, gab keinen Hinweis zur Entstehung der Turbulenz; denn es ergab sich ein Abklingen sämtlicher Störungen, also ständige Stabilität der vorausgesetzten laminaren Strömung. Anfachung von Störungen erhielten erst PRANDTL¹⁾ und TIETJENS⁴⁾ bei gewissen Profilen. Doch erhielten diese Autoren das physikalisch befremdende Resultat, daß in dem Bereich von Reynoldsschen Zahlen, für den die benutzten Näherungen gültig waren, es stets auch angefachte Schwingungen gab, während man zu erwarten hatte, daß unterhalb einer gewissen Reynoldsschen Zahl die Laminarströmung gegenüber allen Störungen stabil ist. Nun waren in den PRANDTL-TIETJENS-

1) L. PRANDTL: Zs. f. angew. Math. u. Mech. 1, S. 431, 1921 bzw. Phys. Zs. 23, S. 19, 1922.

2) L. HOPF; Ann. d. Phys. 44, S. 1, 1914.

3) R. v. MISES: Beitrag zum Oscillationsproblem. HEINRICH WEBER-Festschrift 1912, S. 252.

4) O. TIETJENS: Zs. f. angew. Math. u. Mech. 5, S. 200, 1925.

schen Untersuchungen der mathematischen Einfachheit halber nach einem Vorschlag RAYLEIGHS für die Grundströmung Profile vorausgesetzt, die sich aus Geradenstücken zusammensetzen. Das durchgängige Verschwinden der Krümmung des Profles der Grundströmung bedeutet aber in diesem Falle eine so wesentliche physikalische Voraussetzung, daß man bei Berücksichtigung der Krümmung eine Modifikation des PRANDTL-TIETJENSSCHEN Ergebnisses gerade in dem physikalisch noch unbefriedigenden Punkte erwarten konnte. Im folgenden sind also Profile mit nicht überall verschwindender Krümmung behandelt worden.

Diese einleitende Darlegung soll natürlich nicht im entferntesten einen Überblick über die ausgedehnte Literatur¹⁾ zur Entstehung der Turbulenz bieten; angegeben ist nur der Zusammenhang, in den wir die folgende Arbeit eingeordnet wissen wollen.

Meinem hochverehrten Chef, Herrn Prof. Dr. L. PRANDTL, danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Untersuchung und für sein ermutigendes und förderndes Interesse an meiner Arbeit.

§ 1. Die allgemeine Störungsgleichung.

Die Hauptströmung sei $U(y)$, wobei y die Koordinate senkrecht zu der in die x -Achse fallenden Strömungsrichtung ist. Die Störungen denkt man sich nach FOURIER zerlegt, sodaß die Stromfunktion eines bestimmten FOURIERGLIEDES $\varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} = \varphi(y) e^{i\alpha(x - ct)}$ sei. α ist die räumliche, der Realteil von β die zeitliche Kreisfrequenz, der reelle Teil von c die Phasengeschwindigkeit der betreffenden Störung; der imaginäre Teil von β gibt die Anfachung oder Dämpfung der Störung an, je nachdem er positiv oder negativ ist. Nach der Methode der kleinen Schwingungen berücksichtigt man stets nur die in $\varphi(y)$ linearen Glieder. Man erhält dann durch Einsetzen in die NAVIER-STOKESSCHEN Differentialgleichungen der reibenden Flüssigkeiten, Elimination des Druckes und durchgängige Einführung dimensionsloser Größen die Störungsgleichung

$$(1) \quad (U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = -\frac{i}{\alpha R} (\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi)$$

mit R als Reynoldsscher Zahl. Die Bezugslänge, mit der eine charakteristische Geschwindigkeit des Profles, z. B. die maximale

1) Vgl. dazu die zusammenfassenden Berichte für die theoretische Literatur von F. NOETHER: *Zs. f. angew. Math. u. Mech.* **1**, S. 125, 1921 und für die experimentelle von L. SCHILLER: *Phys. Zs.* **26**, S. 566, 1925.

U_m multipliziert nach Division durch die kinematische Zähigkeit νR ergibt, ist als eine Abmessung des Profils so gewählt, daß die Ableitungen der dimensionslosen U in (1) von der Größenordnung 1 sind. Als Randbedingung hat man an den begrenzenden Wänden, d. h. den Grenzen des Definitionsbereiches von $U(y)$, das Verschwinden beider Störungskomponenten, also von φ und φ' .

Zunächst werden wir im folgenden β bzw. c rein reell annehmen, wir suchen also die Durchgangspunkte von Stabilität zu Labilität. Für dies Problem lassen sich nun leicht zwei Aussagen über c und α machen. Schreibt man die Störungsgleichung symbolisch $L(\varphi) = 0$ und integriert die Ausdrücke $\bar{\varphi} L(\varphi) - \varphi \bar{L}(\varphi)$ bzw. $\bar{\varphi} L(\varphi) + \varphi \bar{L}(\varphi)$ (konjugiert komplexe Größen sind überstrichen) zwischen den Rändern unter Berücksichtigung der Randbedingungen, so erhält man in einfacher und bekannter Weise¹⁾ einmal für $U'' \leq 0$ $c < U_{\max.}$, ferner $\alpha \ll R$. Gerade der Umstand, daß man demnach eine Nullstelle von $U - c$ annehmen muß, bedingt besondere mathematische Erörterungen und führt ein auch physikalisch interessantes Verhalten der Störungen mit sich.

§ 2. Die „reibunglosen“ Lösungen der Störungsgleichung.

Allgemein nimmt man im folgenden αR sehr groß an.

Dann liegt der Versuch nahe, Lösungen der Störungsgleichung angenähert in der Weise darzustellen, daß man die mit dem sehr kleinen Faktor $\frac{1}{\alpha R}$ multiplizierten Glieder der Störungsgleichung wegläßt, also Lösungen der reibungslosen Störungsgleichung.

$$(2) \quad (U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = 0$$

äufsucht. Wir wollen die Lösungen dieser reibungslosen Störungsgleichung betrachten, ohne zunächst weiter auf ihren Zusammenhang mit den Lösungen der allgemeinen Störungsgleichung (bei großen αR) einzugehen.

An der Stelle $U = c$ (vgl. dazu den Schluß von § 1) hat die Differentialgleichung (2) einen singulären Punkt. Da $\frac{U''}{U - c}$ an dieser Stelle einen Pol 1. Ordnung hat, falls nicht gerade auch U'' hier verschwindet, so liegt eine außerwesentliche Singularität (Stelle der Bestimmtheit) vor, und wir können nach allgemeinen

1) Vgl. etwa SOLBERG: Zum Turbulenzproblem, Proc. of the first Intern. Congress f. Applied Mechanics, Delft 1924, S. 387, oder NOETHER: Zur asymptotischen Behandlung der stationären Lösungen im Turbulenzproblem. Zs. f. angew. Math. u. Mech. 6, S. 232. 1926.

Sätzen über lineare Differentialgleichungen leicht die konvergenten Reihenentwicklungen der Integrale von der Stelle $U-c=0$ aus aufstellen. In diesem Punkte sei $y=0$ gesetzt und y sei positiv für $U-c>0$; demnach bezeichne der Zeiger 0 Werte an dieser Stelle. Dann sind zwei linear unabhängige Lösungen von (2), wenn mit $\mathfrak{P}_1(y)$ bzw. $\mathfrak{P}_2(y)$ Potenzreihen in y , mit A eine durch die Differentialgleichung bestimmte Konstante bezeichnet werden:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= y \mathfrak{P}_1(y) = y + \dots \\ \varphi_2 &= \mathfrak{P}_2(y) + A \varphi_1 \log y = 1 + \dots + \frac{U''_0}{U'_0} y \log y + \dots\end{aligned}$$

Dabei soll ein für alle Mal festgesetzt werden, daß für positive y $\log y$ rein reell ist.

Bevor wir aus der analytischen Beschaffenheit von φ_1 und φ_2 Folgerungen ziehen, seien diese für einen speziellen Fall von U und zwar für parabolische Geschwindigkeitsverteilung angegeben. Demnach sei $U-c = y(2a-y)$, sodaß für $y=a$ $U'=0$ wird; setzt man noch $a = \sqrt{1-c}$, so wird hier $U=1$ und für $y=a-1$ $U=0$. Zweckmäßig führen wir $y_1 = \frac{y}{a}$, $\alpha_1 = a\alpha$ ein, sodaß im Parabelscheitel also $y_1=1$ ist, und erhalten dann als Differentialgleichung in der neuen Variablen

$$y_1(2-y_1)(\varphi'' - \alpha_1^2 \varphi) + 2\varphi = 0.$$

Man erhält die Reihenentwicklungen:

$$\frac{\varphi_1}{a} = y_1 + \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1^3 + \dots,$$

wobei

$$\alpha_n = \frac{n(n-3)\alpha_{n-1} + 2\alpha_1^2 \alpha_{n-2} - \alpha_1^2 \alpha_{n-3}}{2n(n-1)},$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1^2}{6}, \quad \alpha_4 = -\frac{\alpha_1^2}{18} \dots$$

ist.

$$\varphi_2 = 1 + b_1 y_1 + b_2 y_1^2 + b_3 y_1^3 + \dots - \frac{\varphi_1}{a} \log y_1,$$

wobei

$$b_n = \frac{n(n-3)b_{n-1} + 2\alpha_1^2 b_{n-2} - \alpha_1^2 b_{n-3} + 2(2n-1)\alpha_n - (2n-3)\alpha_{n-1}}{2n(n-1)},$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -1 + \frac{\alpha_1^2}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{8} + \frac{\alpha_1^3}{18} \dots$$

ist.

Für $\alpha_1 = 0$ ist

$$\varphi_1 = \frac{U-c}{2\alpha},$$

$$\varphi_2 = -2\alpha(U-c) \int^y \frac{dy}{(U-c)^3},$$

das sind Ausdrücke, die auch für beliebige U bei $\alpha = 0$ die Lösungen darstellen.

Bei der allgemeinen Betrachtung von φ_1 und φ_2 stellen wir zunächst fest, daß φ_1 auch im singulären Punkt regulär bleibt, während φ_2 dort eine logarithmisch unendliche Ableitung hat. Bleiben wir, wenigstens soweit φ_2 in Frage kommt, in einiger Entfernung vom singulären Punkt $U = c$, so genügen φ_1 und φ_2 dort in der Tat angenähert der vollständigen Störungsgleichung (1) bei sehr großem αR und zwar umso besser, je größer αR ist¹⁾. Der Fehler in φ_1 und φ_2 ist klein von der Größenordnung $(\alpha R)^{-1}$. In unmittelbarer Nachbarschaft des kritischen Punktes ist dieser Schluß wegen des Unendlichwerdens der Ableitungen von φ_2 offenbar nicht mehr berechtigt. Wir müssen daher die allgemeine Störungsgleichung (1) in der Nähe von $U = c$ diskutieren. Physikalisch ist diese Stelle dadurch charakterisiert, daß ein Flüssigkeitsteilchen wegen der Gleichheit von Hauptgeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit sich stets in demselben Druckfelde befindet, wenn man von der kleinen Querbewegung der Störung absieht.

§ 3. Die Lösungen der Störungsgleichung in der Nachbarschaft von $U = c$.

Zur Untersuchung der Lösungen in der Nähe des kritischen Punktes $U = c$ nehmen wir einen kleinen Bereich um die kritische Stelle, den „Übergangsstreifen“, worin wir $U - c$ mit genügender Genauigkeit durch $U'_0 y$ und zunächst auch U'' durch U''_0 ersetzen können. Wir führen nun noch $y = (\alpha R U'_0)^{-\frac{1}{2}} \eta = \varepsilon \eta$ ein, wobei η wegen der Kleinheit von ε auch bei kleinem y sehr großer Werte fähig ist. Dann erhalten wir aus (1) die Differentialgleichung in η :

$$(3) \quad i\varphi'''' + \varphi''(\eta - \varepsilon^2 2\alpha^2 i) - \varphi \left(\varepsilon \frac{U''_0}{U'_0} + \varepsilon^3 \eta \alpha^2 - \varepsilon^4 \alpha^4 i \right) = 0,$$

1) Auf einem mehr formalen Wege würde man eben zu den reibungslosen Lösungen kommen, wenn man nach denjenigen Integralen der allgemeinen Störungsgleichung fragt, die mit ihren Ableitungen bei beliebig wachsendem αR , abgesehen von der kritischen Stelle $U = c$, endlich bleiben.

sodaß wir Lösungen der Störungsgleichung für große αR d. h. kleine ε in der Umgebung von $U = c$ aus der Differentialgleichung

$$(4) \quad -i\varphi'''' = \eta\varphi'' - \varepsilon \frac{U_0''}{U_0'} \varphi$$

in erster Näherung gewinnen, da in der benutzten Differentialgleichung (3) $U = c$ d. h. $\eta = 0$ kein singulärer Punkt ist und angenäherte Werte der Koeffizienten der Differentialgleichung demnach auch angenäherte Lösungen bedingen.

Für φ_1 liefert die Differentialgleichung (4) erwartungsgemäß keine Korrektur, dagegen für φ_2 sehr wohl eine, die wir in folgender Weise gewinnen.

Im kritischen Punkt y bzw. $\eta = 0$ war ja $\varphi_2 = 1$ gesetzt. Diesen Wert setzen wir als Näherung φ_{20} in das Glied $\varepsilon \frac{U_0''}{U_0'} \varphi$ ein und berechnen aus der Differentialgleichung (4) eine Korrektur, die wir passend mit $\varepsilon\varphi_{21}$ bezeichnen. Die Differentialgleichung für φ_{21} ist dann

$$(5) \quad -i\varphi_{21}'' = \eta\varphi_{21}'' - \frac{U_0''}{U_0'}$$

Da wir nach dem Vorhergehenden annehmen dürfen, daß in einiger Entfernung vom kritischen Punkt die reibungslose Lösung gültig ist, so werden wir eine Lösung von (5) anstreben, die sich nach außen hin der entsprechenden reibungslosen Lösung anschließt. In der Nachbarschaft des kritischen Punktes (d. h. bei kleinem $|y|$) ist aber reibungslos gerechnet $\varphi_{21}'' = \frac{U_0''}{U_0'} \frac{1}{\eta}$; an diesen Wert soll sich also die Lösung von (5) nach außen hin d. h. für große $|\eta|$ anschließen. Es wird uns in der Tat gelingen, eine derartige Lösung herzustellen.

Bezeichnen wir abkürzend mit $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ bzw. $H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$ die HANKELschen Funktionen 1. bzw. 2. Art mit dem Index $\frac{1}{3}$ und dem Argument $\frac{2}{3}(i\eta)^{\frac{3}{2}}$: $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}, {}^{(2)} \left[\frac{2}{3}(i\eta)^{\frac{3}{2}} \right]$, so sind die Lösungen der homogenen Differentialgleichung (5)

$$(6) \quad \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \text{ und } \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5)

$$(7) \quad \frac{U_0''}{U_0'} \frac{\pi}{6} \eta^{\frac{1}{2}} \left\{ H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \int^{\eta} \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} d\eta - H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \int^{\eta} \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} d\eta \right\}.$$

Der bequemen Darstellung der HANKELschen Funktionen wegen betrachten wir diese Lösung in der unteren η -Halbebene, was

wegen der Regularität der Lösung erlaubt ist, sodaß $0 \geq \arg \eta \geq -\pi$ ist. Ferner sei $\frac{3\pi}{4} \geq \arg [(i\eta)^{\frac{3}{2}}] \geq -\frac{3\pi}{4}$. Für den Anschluß an die reibungslose Lösung brauchen wir das Verhalten von (7) für große $|\eta|$. In den Anschlußpunkten sei $\eta = \pm r$, auf dem Kreis mit diesem Radius $\eta = re^{i\vartheta}$. Die untere Grenze der beiden Integrale von (7) wird in einen Punkt dieses Halbkreises in der unteren Halbebene gelegt. Wir ersetzen die HANKELSCHE Funktionen durch ihre asymptotischen Formeln für große Werte des Argumentes:

$$H_{\frac{3}{2}}^{(1), (2)} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (i\eta)^{-\frac{3}{4}} \exp \left\{ \pm i \left[\frac{2}{3} (i\eta)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{12} \pi \right] \right\}$$

Dabei ist $-\frac{3\pi}{8} \leq \arg [(i\eta)^{-\frac{3}{4}}] \leq \frac{3\pi}{8}$. Das Zeichen $\exp(\dots)$ bedeutet die Exponentialfunktion des Klammerausdruckes. Für das Folgende benötigen wir (7) auf dem Halbkreise in der unteren η -Halbebene mit r . Das erste Integral in (7) erhält dort in erster asymptotischer Näherung den Wert:

$$-\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{5i\pi}{8}} r^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{3i\vartheta}{4}} \exp \left\{ +i \left(\frac{2}{3} e^{\frac{3i\pi}{4}} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\vartheta}{2}} - \frac{5\pi}{12} \right) \right\} + c_1(r).$$

$c_1(r)$ und das später verwandte $c_2(r)$ sind durch die Wahl der unteren Integralgrenze bestimmt und hängen nicht von φ ab. Das zweite Integral in (7) wird

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{5i\pi}{8}} r^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{3i\vartheta}{4}} \exp \left\{ -i \left(\frac{2}{3} e^{\frac{3i\pi}{4}} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\vartheta}{2}} - \frac{5\pi}{12} \right) \right\} + c_2(r).$$

Fügen wir nun zu (7) Lösungen (6) der homogenen Differentialgleichung hinzu, sodaß die Glieder mit $c_1(r)$ und $c_2(r)$ wegfallen, so erhalten wir φ''_{21} ; denn längs des Halbkreises bekommt man dann:

$$\begin{aligned} \frac{U''_0}{U'_0} \frac{\pi}{6} r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\vartheta}{2}} \frac{3}{\pi} r^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3i\vartheta}{2}} 2 \exp \{-i \dots\} \cdot \exp \{+i \dots\} \\ = \frac{U''_0}{U'_0} r^{-1} e^{-i\vartheta} = \frac{U''_0}{U'_0} \frac{1}{\eta}. \end{aligned}$$

Auf dem vorstehenden Wege erhalten wir also aus (7) in eindeutiger Weise tatsächlich das gesuchte φ''_{21} . φ'_{21} folgt durch Integration von φ''_{21} nach η , wobei wir als Integrationsweg wiederum den Halbkreis nehmen, auf dem nun ja φ''_{21} bekannt ist. Es ist

$$\varphi'_{21}(-r) = \varphi'_{21}(+r) - \frac{U''_0}{U'_0} i\pi.$$

Analog erhält man schließlich, daß die reibungslose Lösung am positiven Rande ($+r$) des Übergangsstreifens

$$1 + \frac{U''_0}{U'_0} y \log y$$

am negativen Rande ($-r$) zu

$$1 + \frac{U''_0}{U'_0} y \log |y| - \frac{U''_0}{U'_0} i \pi y$$

wird, oder allgemein, daß φ_2 , für positive y bekanntlich von der Form

$$1 + \dots + \frac{U''_0}{U'_0} \varphi_1 \log y,$$

beim Übergang zu negativem y in

$$1 + \dots + \frac{U''_0}{U'_0} \varphi_1 \log |y| - \frac{U''_0}{U'_0} i \pi \varphi_1$$

übergeht. Damit haben wir die Übergangssubstitution in φ_2 beim kritischen Punkte abgeleitet, die im Hinzutreten eines imaginären Teiles und damit eines Phasensprunges in der x -Komponente der Störung besteht. Es hat sich nach den vorstehenden Rechnungen herausgestellt, daß die Bestimmung der Übergangssubstitution auf die Bestimmung des physikalisch realen Zweiges des Logarithmus in φ_2 hinausläuft.

Über die Breite des Übergangsstreifens, für den wir im vorstehenden die Lösung φ_{21} ableiteten, läßt sich folgende Aussage machen. r muß ja so groß gewählt werden, daß die bei der vorstehenden Rechnung benutzten asymptotischen Näherungen für große r bis auf einen Fehler gültig sind, den wir wegen der auch nur näherungsweise Gültigkeit der reibungslosen Lösungen außerhalb des Übergangsstreifens zugestehen¹⁾. Aus diesem so bestimmten r berechnet sich die Breite des Übergangsstreifens in der ursprünglichen y -Koordinate zu $2\varepsilon r = 2(\alpha R U'_0)^{-\frac{1}{2}} r$. Sobald also αR nur groß genug ist, nimmt das reibungslose φ''_{21} wegen der kleinen Breite des Übergangsstreifens, die in der Grenze nach 0 geht, an dessen Rändern tatsächlich die Werte an, die wir oben in den Randbedingungen ansetzten; ebenso ist φ_2 auf dem obigen Integrationswege noch genau genug gleich dem Wert 1, den wir

1) Das in der asymptotischen Entwicklung von φ''_{21} für große η auf das Glied $\frac{U''_0}{U'_0} \frac{1}{\eta}$ folgende Glied ist $2 \frac{U''_0}{U'_0} \frac{i}{\eta^2}$; hiernach kann man den erwähnten Fehler abschätzen.

für φ_{20} annahmen, sodaß wir die asymptotische Gültigkeit unserer Beziehungen für große αR nachgewiesen haben. Übrigens wird in § 6, 3 ein Hinweis auf eine etwas anders und erweitert gefaßte Ableitung der Übergangssubstitution gegeben.

Die Abb. 1 gibt für $\frac{U''_0}{U'_0} = 1$ ein graphisch gewonnenes qualitatives Bild des Verhaltens von φ'_{21} im Übergangsstreifen, getrennt in Realteil $\Re(\varphi'_{21})$ und Imaginärteil $\Im(\varphi'_{21})$.

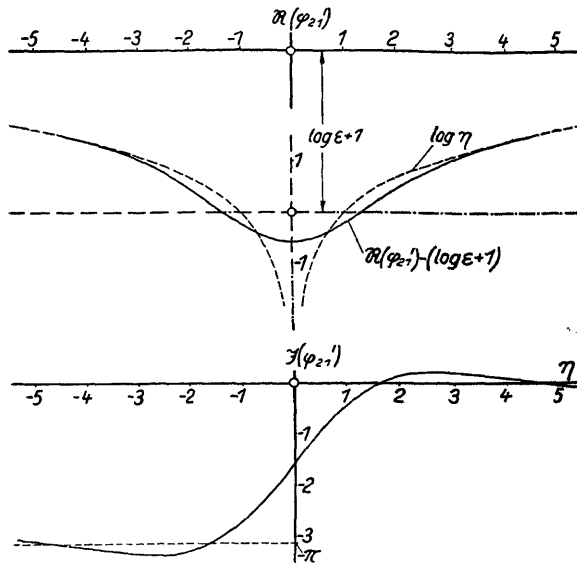


Abbildung 1.

Die Differentialgleichung (4) bzw. (5) liefert uns nun auch ohne weiteres das zweite Paar von Lösungen, die aus der allgemeinen Störungsgleichung für große αR folgen. Denn neben der Lösung φ'_{21} von (5), die wir eben betrachteten, sind offenbar auch die Lösungen (6) der zugehörigen homogenen Differentialgleichung möglich, also

$$\varphi''_3 = \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \quad \text{und} \quad \varphi''_4 = \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$$

φ''_3 klingt für größere positive η sehr stark ab. Es werde

$$(8) \quad \varphi_3 = \int_{+\infty}^{\eta} \int_{+\infty}^{\eta} \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\eta)^{\frac{2}{3}} \right] d\eta d\eta$$

gesetzt. φ_3 geht für positive η nach unendlich und wird im folgenden nicht gebraucht werden. Der Fehler in φ_3 ist von der Größenordnung $\varepsilon \frac{U''_0}{U'_0}$.

Nach dem Grad ihrer Veränderlichkeit kann man φ_1 und φ_2 auch als „langsame“, φ_3 und φ_4 als „rasche“ Lösungen bezeichnen.

§ 4. Lösungen der Störungsgleichung an der Wand für $c \gg U$.

Es wird nützlich sein und unsere Anschauung in das Wesen der vier Integrale beleben, wenn wir sie in einem Spezialfall unabhängig vom letzten Abschnitt ableiten, und zwar wollen wir das für die Nachbarschaft der Wand ($U = 0$) in dem Fall tun, daß $c \gg U$ ist, also die kritische Stelle außerhalb der betrachteten Schicht liegt. Die allgemeine Störungsgleichung wird also für eine wandnahe Schicht, in der wir $U - c$ genähert durch c , U'' ebenfalls durch den Wert an der Wand U''_w ersetzen können:

$$(9) \quad -i\alpha R \{c(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) + U''_w \varphi\} = \varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi.$$

Bezeichnen wir mit y_w den Abstand von der Wand, so haben die Lösungen dieser Differentialgleichung (9) die Form $\varphi = e^{ky_w}$. Wir erhalten hier nun in besonders durchsichtiger Weise die beiden Lösungspaare. Es wird nämlich

$$k^2 = \frac{1}{2} \left\{ -i\alpha R c + 2\alpha^2 \pm \sqrt{-\alpha^2 R^2 c^2 - 4U''_w i\alpha R} \right\} \\ = \frac{1}{2} \left\{ -i\alpha R c + 2\alpha^2 \pm \left[i\alpha R c - \frac{2U''_w}{c} + \frac{2iU''_w{}^2}{\alpha R c^3} \dots \right] \right\}$$

Das eine k^2 wird demnach annähernd $\alpha^2 - \frac{U''_w}{c} + i \frac{U''_w{}^2}{\alpha R c^3} \dots$ und liefert uns bei ausschließlicher Berücksichtigung der größten Glieder bei großem αR das Paar der reibungslosen Lösungen, d. h. wegen der Abhängigkeit der Koeffizienten der Differentialgleichung von y_w nur den Anfang ihrer Entwicklung von der Wand aus, etwa

$$1 + \left(\alpha^2 - \frac{U''_w}{c} \right) \frac{y_w^2}{2!} \quad \text{bzw.} \quad y_w + \left(\alpha^2 - \frac{U''_w}{c} \right) \frac{y_w^3}{3!}.$$

Das andere k^2 wird $-i\alpha R c$ und gibt uns φ_3 und φ_4 . Die Lösung, die dem φ_3 des vorigen Abschnittes entspricht, wird bis auf einen konstanten Faktor

$$(10) \quad e^{\frac{3i\pi}{4} \frac{\overline{\alpha R c} y_w}{\alpha R c y_w}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i) \sqrt{\alpha R c} y_w},$$

klingt also sehr stark ab, sodaß die Veränderung der Koeffizienten der Differentialgleichung nicht weiter eingeht. Bemerket sei gleich

an dieser Stelle, daß die Formel (10) sich auch aus dem allgemeinen Ausdruck (8) für φ_s durch Spezialisierung für negativ große η gewinnen läßt.

TJETJENS (l. c.) hat φ_s aus einer gesonderten Grenzschichtgleichung gewonnen, während wir einheitlich alle Lösungen aus der allgemeinen Störungsgleichung ableiteten. φ_s kann man als eine Art Grenzschichtlösung an der Wand oder mit anderen Worten äußere Reibungsschichtlösung auffassen. Im Falle $U'' \neq 0$ tritt aber im kritischen Punkte, an dem nach der reibungslosen Rechnung die eine Störungskomponente unendlich werden würde, eine zweite, innere Reibungsschichtlösung auf, die in § 3 als φ_{21} abgeleitet wurde. In dem oben erörterten Spezialfall größerer c fallen die beiden Reibungsschichten auch räumlich auseinander, sonst greifen sie in einander über. Der wesentliche Unterschied unserer Untersuchung gegenüber der von TJETJENS liegt gerade in dem Auftreten der inneren Reibungsschicht.

§ 5. Formulierung der Randbedingungen.

Nachdem wir den Einblick in den Charakter der 4 Integrale der Störungsgleichung gewonnen haben, wenden wir uns wieder dem Randwertproblem zu und formulieren auf dieser Grundlage die Randbedingungen.

Zunächst nehmen wir ein Profil $U(y)$, das vom Werte $U = 0$ an der Wand bis zu einem Maximalwert steigt, den es dann konstant beliebig weit beibehält. Dies gilt z. B. für das wichtige Profil der Strömung längs einer Platte sehr gut. Da φ_s für positive y über alle Grenzen wächst, kommt es in dem Lösungsaggregat nicht vor. Für $U = \text{konst.}$ sind die reibungslosen Lösungen $e^{-\alpha y}$ bzw. $e^{+\alpha y}$, d. h. wegen der notwendigen Beschränktheit können wir nur $e^{-\alpha y}$ brauchen¹⁾. Somit muß in diesem Gebiet $\frac{\varphi'}{\varphi} = -\alpha$ sein, wodurch wir also eine einfache Randbedingung für den Anfangspunkt des Gebietes mit konstantem U gewonnen haben, den wir künftig mit dem Index m kennzeichnen. φ_s ist nämlich hier schon abgeklungen, also lautet die Bedingung

$$(11) \quad C_1(\varphi'_{1m} + \alpha\varphi_{1m}) + C_2(\varphi'_{2m} + \alpha\varphi_{2m}) = 0$$

oder abgekürzt

$$(11a) \quad C_1 \Phi_{1m} + C_2 \Phi_{2m} = 0.$$

1) $e^{+\alpha y}$ und φ_s können sich nicht ausgleichen, da nach einer Bemerkung in § 1 $\alpha < \sqrt{\alpha R}$ ist.

An der Wand muß nun φ und φ' verschwinden. Wenn wir die Werte dort mit dem Index w bezeichnen, wobei wir in φ_{3w} und φ'_{2w} gleich die Übergangssubstitution angebracht haben, erhalten wir also

$$(12\ a) \quad C_1 \varphi_{1w} + C_2 \varphi_{2w} + C_3 \varphi_{3w} = 0.$$

und

$$(12\ b) \quad C_1 \varphi'_{1w} + C_2 \varphi'_{2w} + C_3 \varphi'_{3w} = 0$$

oder

$$(12\ c) \quad C_1 \varphi_{1w} + C_2 \varphi_{2w} - \frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_{3w}} (C_1 \varphi'_{1w} + C_2 \varphi'_{2w}) = 0.$$

$\frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_{3w}}$ findet sich nun bereits in der Arbeit von TIETJENS berechnet und läßt sich, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, durch die Größe D bei TIETJENS ausdrücken. Es ist

$$(13) \quad \frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_{3w}} = -\varepsilon D.$$

D ist dort als Funktion von z_0 aufgetragen; z_0 ist nichts anderes als der im η -Koordinatensystem (s. § 3) gemessene Abstand der Wand von der kritischen Stelle, den man mit η_w bezeichnen möge, also

$$(14) \quad \eta_w = -\frac{c}{U'_0} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Tabelle gibt $D(\eta_w)$ nach TIETJENS:

η_w	$D(\eta_w)$
0	0,702 - 0,425 i
-0,5	0,785 - 0,411 i
-1,0	0,920 - 0,389 i
-1,5	1,043 - 0,297 i
-2,0	1,206 - 0,147 i
-2,5	1,357 + 0,108 i
-3,0	1,400 + 0,515 i
-3,5	1,180 + 1,130 i
-4,0	0,460 + 1,250 i
-4,5	-0,0405 + 0,8080 i
-5,0	0,0057 + 0,3645 i
-5,5	0,1913 + 0,2393 i

Die beiden Bedingungen (11 a) und (12 c) liefern eine Determinantenbeziehung, aus der sich $\frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_3}$ ausrechnen läßt. Wir erhalten

dadurch

$$-\varepsilon D = \frac{\Phi_{1m} \varphi_{2w} - \Phi_{2m} \varphi_{1w}}{\Phi_{1m} \varphi'_{2w} - \Phi_{2m} \varphi'_{1w}}$$

und indem wir noch durch η_w dividieren:

$$(15) \quad -\frac{D}{\eta_w} = -\frac{U'_0}{c} \frac{\Phi_{1m} \varphi_{2w} - \Phi_{2m} \varphi_{1w}}{\Phi_{1m} \varphi'_{2w} - \Phi_{2m} \varphi'_{1w}}$$

Die rechte Seite der Gl. (15) ist bekannt, wenn wir die Parameter c und α vorschreiben; sie werde ganz allgemein mit $E(c; \alpha)$ bezeichnet. Die linke Seite ist als Funktion von η_w gegeben. Wir stellen uns nun ein Polardiagramm von $-\frac{D(\eta_w)}{\eta_w}$ mit dem reellen

Teil von $-\frac{D(\eta_w)}{\eta_w}$ als Abszisse, dem imaginären Teil als Ordinate her (vgl. Abb. 3). Dann wählen wir ein bestimmtes c und tragen E in Funktion von α in das Polardiagramm ein, worauf wir die Schnittpunkte mit dem $-\frac{D(\eta_w)}{\eta_w}$ -Polardiagramm und damit das zu dem jeweiligen „Durchgangspunkt“ (s. § 1) gehörende η_w bestimmen. Aus η_w läßt sich dann nach (14) ε und damit der letzte Parameter R ermitteln.

Über D ist noch zu bemerken, daß es für negativ große η in $\frac{i\pi}{e^4} \sqrt{-\eta_w}$ übergeht. Dies kann man entweder durch eine asymptotische Betrachtung des in (8) gegebenen Ausdruckes für φ_s oder aus dem in § 4 direkt abgeleiteten Ausdruck (10) schließen, wenn man dort schließlich c durch η_w ausdrückt.

Bei einem symmetrischen U -Profil gewinnt man eine einfache Form der Randbedingung aus der Bemerkung, daß in diesem Falle φ in einen geraden und ungeraden Teil zerlegt werden kann, die jeder für sich der Störungsgleichung und den Grenzbedingungen genügen müssen. Man hat daher in der Mitte, da φ_s auch hier nicht eingehen kann und φ_s schon abgeklungen ist, die Bedingung

$$(16) \quad C_1 \varphi'_{1m} + C_2 \varphi'_{2m} = 0.$$

bei geradem φ , oder

$$(17) \quad C_1 \varphi_{1m} + C_2 \varphi_{2m} = 0$$

bei ungeradem φ , die an die Stelle von (11) tritt, während die Bedingung an der Wand (12) erhalten bleibt.

TJETSJENS hat in seiner Arbeit die eine Randbedingung an der Wand und zwar für die y -Komponente nach einem Vorschlag von

PRANDTL in einer anderen Form angesetzt als wir. Da gelegentlich¹⁾ Zweifel an der Berechtigung dieser Randbedingung geäußert sind, weisen wir ihre inhaltliche Übereinstimmung mit der unseren nach. Wir beschreiben das TIETJENSsche Verfahren formal und verweisen für die physikalische Begründung auf die Arbeit selbst. TIETJENS läßt seine Reibungsschichtlösung, die unserem φ_s entsprechen würde und mit φ_s^* (proportional v^* bei TIETJENS) bezeichnet werde, für $\eta = +\infty$ nicht wie wir nach 0 gehen, sondern nach einem konstanten Wert $\varphi_{s\infty}^*$ (proportional v_∞^*), sodaß also $\varphi_s^* = \varphi_s + \varphi_{s\infty}^*$ ist; denn $\varphi_{s\infty}^{*'} = 0$ ist ebenso wie $\varphi_{s\infty}' = 0$ gesetzt. Dann wird bei TIETJENS die Konstante $\varphi_{s\infty}^*$ so bestimmt, daß $\varphi_{sw}^* = 0$ wird, d. h. $\varphi_{s\infty}^* = -\varphi_{sw}$. Schließlich wird die y -Komponente, die aus den reibungslosen Lösungen für die Wand folgt, gleich v_∞^* gesetzt, d. i.

$$C_1 \varphi_{1w} + C_2 \varphi_{2w} = C_3 \varphi_{s\infty}^*$$

während wir oben

$$C_1 \varphi_{1w} + C_2 \varphi_{2w} + C_3 \varphi_{sw} = 0$$

setzten. Beide Bedingungen sind also nach der Beziehung zwischen $\varphi_{s\infty}^*$ und φ_{sw} inhaltlich identisch.

§ 6. Das Gleichgewicht der Strömung längs einer ebenen Platte.

1. Der oben entworfene Rechnungsgang soll zunächst auf das Geschwindigkeitsprofil angewandt werden, daß sich bei größeren Reynoldsschen Zahlen an einer Platte ausbildet, die in einem gleichförmigen Flüssigkeitsstrom von unendlicher Ausdehnung parallel zu diesem eingetaucht ist, wobei die Vorderkante der Platte senkrecht zur Strömungsrichtung verläuft. Wir wählen gerade diese Geschwindigkeitsverteilung, weil Experimente über ihre Stabilität angestellt sind und auch die Voraussetzungen für die Genauigkeit unserer Näherung hier besonders günstig liegen. Dies Profil ist von BLASIUS nach Ansätzen von PRANDTL²⁾ berechnet und ist besonders dadurch charakterisiert, daß es an der Wand mit

1) Vgl. NOETHER, l. c. Zs. f. angew. Math. u. Mech. 6, 1926, S. 243 und die anschließende Diskussion zwischen PRANDTL und NOETHER, ebenda S. 339/340.

2) L. PRANDTL: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. d. III. Internat. Math.-Kongresses, Heidelberg 1904, wieder abgedruckt in „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik“ Göttingen 1927.

H. BLASIUS: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zs. f. Math. u. Phys. Bd. 56, S. 1, 1908.

verschwindender Krümmung beginnt und sich nach außen mit scharfer Asymptote (entsprechend dem asymptotischen Verhalten des Fehlerintegrals) der ungestörten Geschwindigkeit anschließt (s. Abb. 2).

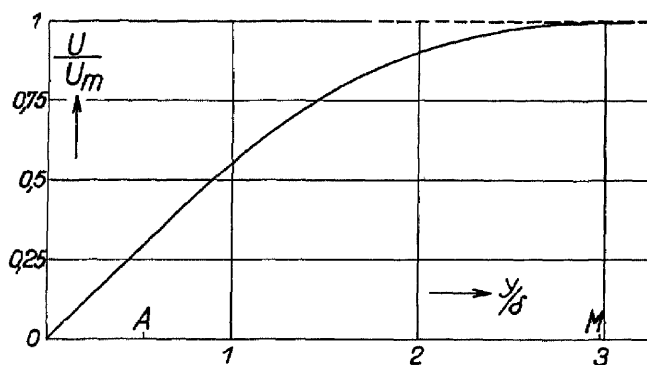


Abbildung 2.

Für unsere Zwecke wird es nützlich sein, eine angenäherte Darstellung des Profiles zu besitzen. Nach dem Vorstehenden wird man am einfachsten die Geschwindigkeitsverteilung an der Wand mit einem Geradenstück beginnen lassen und den asymptotischen Anschluß an die ungestörte Geschwindigkeit durch einen Anschluß im Endlichen (bei M in Abb. 2) ersetzen, also das Geradenstück etwa durch ein Parabelstück fortsetzen. Wenn wir mit y_m den Abstand vom Parabelscheitel bezeichnen, so lassen wir nach der einen Seite U konstant mit seinem maximalen Wert ($= 1$) sich fortsetzen, nach der anderen Seite wird $U = 1 - y_m^2$, wenn wir die Bezugsgrößen, mit denen wir die angewandten Dimensionslosen bilden, entsprechend wählen. Nach der Wand zu und zwar von $y_m = 0,84$ (bei A in Abb. 2) ab soll dann $U = 1,705 - 1,680 y_m$ sein, sodaß an der Wand ($U = 0$) $y_m = 1,015$ ist. Damit ist U selbst genau genug dargestellt, dagegen dürfen wir nicht in dem Gebiet an der Wand etwa $U' = \text{konst.}$, $U'' = 0$ setzen. Es ist vielmehr mit y_w als Wandabstand entsprechend den ersten Gliedern der BLASIUSSCHEN Potenzreihe

$$U' = 1,68 (1 - 3,65 y_w^2),$$

$$U'' = -18,4 y_w^2,$$

gültig in Wandnähe, soweit wir diese Größen später gebrauchen.

Die reibungslosen Lösungen φ_1 und φ_2 berechnet man nach den Reihenformeln von § 2 für parabolische Verteilung von U und unter Benutzung der Lösungen $\text{Sin } \alpha y$ und $\text{Cos } \alpha y$ für lineares U . Damit gelingt es, die Lösungen, abgesehen von der Übergangs-

substitution, für Wand und Parabelscheitel genügend genau darzustellen, wie nähere Betrachtungen zeigten¹⁾. Die Übergangssubstitution darf man natürlich nicht mit dem roh genäherten Profil (Gerade + Parabel) berechnen, sondern mit dem genaueren Wert von $\frac{U''_0}{U'_0} = -3,9c^2$, den man aus den angegebenen Formeln für U'' und U' erhält, wenn man noch beim kritischen Punkt gemäß obigem $c = U = 1,68y_w$ setzt.

2. Die Schnittpunkte der E -Kurven (s. § 5) mit dem $-\frac{D}{\eta_w}$ Polardiagramm bestimmen wir zunächst für $c \sim 0$. Ein imaginärer Bestandteil tritt in E durch den Phasensprung ein, der mit $\frac{U''_0}{U'_0} \sim c^2$ geht, sodaß also für genügend kleine c E rein reell ist.

Die Schnittpunkte mit dem $-\frac{D}{\eta_w}$ -Diagramm liegen daher entweder bei $-\frac{D}{\eta_w} = 0,56$; $\eta_w = -2,3$ oder $-\frac{D}{\eta_w} = 0$ und negativ sehr großem η_w . Indem man nur die linearen Glieder in c und α berücksichtigt, erhält man

$$(18) \quad E = \frac{-1,19\alpha + 2c}{0,596c \cdot 3,36}.$$

Für den ersten Schnittpunkt mit $-\frac{D}{\eta_w} = 0,56$ ist also $\alpha = 0,74c$ und unter Berücksichtigung von $\eta_w = -2,3$ oder

$$(1,68\alpha R)^{\frac{1}{2}} 0,596c = 2,3, \\ R = 46c^{-4}.$$

Für den zweiten Schnittpunkt mit $\frac{D}{\eta_w} = 0$ ist nach (18) $\alpha = 1,68c$.

In diesem Bereich wird η_w sehr groß, daher $\varepsilon D = (2\alpha R c)^{-\frac{1}{2}}(1+i)$ nach (10). Zur Bestimmung von R müssen wir hier die in c und α höheren Glieder heranziehen und benutzen dazu etwa den Imaginärteil von D , dem für die Durchgangspunkte der Imaginärteil von $-E\eta_w$ gleich sein soll. Dieser ergibt sich unter Zugrundelegung des eben berechneten α zu $4,36ic^4$, sodaß $R = 0,0156c^{-10}$ wird. Wir können nun auch noch η_w berechnen und erhalten dafür $0,21c^{-2}$, d. h. für kleine c tatsächlich so große Werte, welche die Benutzung des asymptotischen Wertes von D rechtfertigen.

1) Eine besondere Erörterung ist bei diesem Verfahren zur Darstellung von φ_2 notwendig, wenn der kritische Punkt ($U = c$) sehr nahe an den Anschlußpunkt Gerade-Parabel heranrückt. Doch soll auf die Wiedergabe dieser Überlegung, die für die numerische Rechnung bedeutungsvoll, für das Ganze aber uninteressant ist, hier verzichtet werden.

Diese beiden Grenzfälle sind auch, abgesehen von der expliziten Darstellung der Beziehung zwischen R , α und c deshalb bedeutungsvoll, weil bei ihnen mit größter Genauigkeit unsere asymptotischen Rechnungen für große αR zutreffen. Die Formeln liefern übrigens eine brauchbare Näherung bis etwa $c = 0,05$.

Die anderen Durchgangspunkte werden nach dem in § 5 entwickelten graphischen Verfahren ermittelt (s. Abb. 3). Jenseits eines bestimmten c -Wertes (in Abb. 3 z. B. bei $c = 0,43$) liefern die E -Kurven keinen Schnittpunkt mehr mit dem $-\frac{D}{\eta_w}$ -Diagramm während sie sonst zwei Schnittpunkte geben. Ehe wir in die physikalische Diskussion eintreten, sei noch etwas über die Genauigkeit unserer Rechnung gesagt.

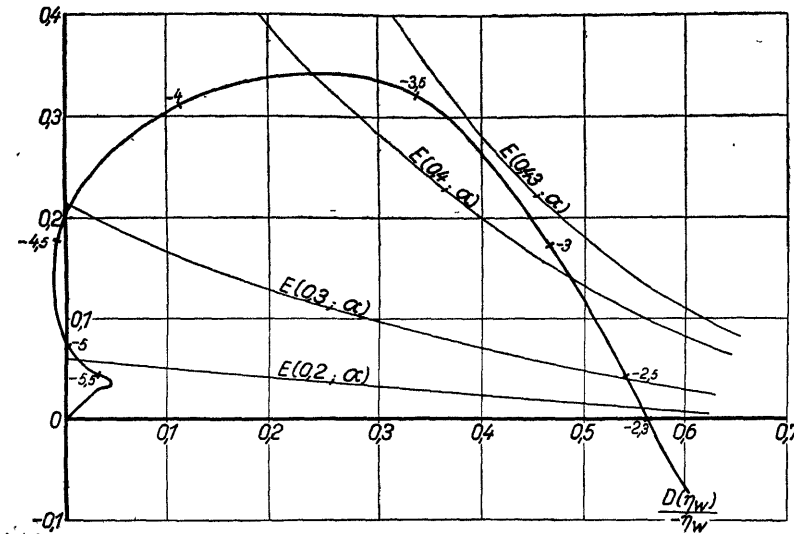


Abbildung 3.

3. Unsere ganze Rechnung ist eine Näherung, die umso schlechter stimmt, je kleiner die dabei auftretenden αR werden. Unter anderem haben wir stets mit der Übergangssubstitution des § 3 gearbeitet, obwohl der Übergangsstreifen keineswegs immer noch klein bleibt, sodaß man nicht mehr wie dort $\frac{U''}{U'} \varphi_2$ im Übergangsstreifen annähernd konstant nehmen darf und auch die Anschlußbedingungen gemäß den größeren $|y|$ -Werten am Rande des Übergangsstreifens zu ändern sind. Nun läßt sich allerdings die Übergangssubstitution auch unter etwas allgemeineren Bedingungen, als dort angegeben, ableiten. Als Differentialgleichung für φ_2 in η im Übergangsstreifen können wir nämlich

$$(19) \quad i\varphi_2'''' + \eta\varphi_2'' = \varphi_2 \left[\varepsilon \frac{U''}{U_0'} + \varepsilon^2 \alpha^2 \eta \left(1 + \frac{U_0''}{U_0'} \frac{\varepsilon \eta}{2!} + \frac{U_0'''}{U_0'} \frac{\varepsilon^2 \eta^2}{3!} + \dots \right) \right] \\ - \varphi_2'' \eta \left(\frac{U_0''}{U_0'} \frac{\varepsilon \eta}{2!} + \frac{U_0'''}{U_0'} \frac{\varepsilon^2 \eta^2}{3!} + \dots \right)$$

ansetzen, wobei die Ableitungen von U die ursprünglichen nach y sind¹⁾. Das Glied auf der rechten Seite von (19) ist nun im Unterschied gegen früher nicht mehr konstant im Übergangsstreifen. Wir können dann verifizieren, daß eine Lösung von (19) existiert, die sich für große $|\eta|$ an die reibungslose Lösung φ_2 mit dem früher als physikalisch real erkannten Zweige des Logarithmus anschließt. Indem man nämlich die rechte Seite von (19) als inhomogenes Glied einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ_2'' auffaßt, weist man mit denselben Mitteln (asymptotische Diskussion von HANKELschen Funktionen und von Integralen damit) wie in § 3 nach, daß auf dem dort eingeführten Halbkreise die Beziehung

$$\varphi_2'' = \varphi_2 \left[\varepsilon \frac{U''}{U_0' \eta} + \varepsilon^2 \alpha^2 \left(1 + \frac{U_0''}{U_0'} \frac{\varepsilon \eta}{2!} + \dots \right) \right] - \varphi_2'' \left(\frac{U_0''}{U_0'} \frac{\varepsilon \eta}{2!} + \dots \right),$$

identisch mit der reibungslosen Störungsgleichung gilt, wodurch die Übergangssubstitution auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen bestätigt ist. Einen kleinen Fehler begehen wir noch dadurch, daß wir an der Wand φ_2 bereits reibungslos, natürlich mit Einschluß des Phasensprunges nehmen, also im übrigen den Reibungseinfluß als abgeklungen voraussetzen²⁾. Außerhalb des Übergangsstreifens (z. B. bei dem Punkt mit dem Index m) ist der Fehler in φ_1 und φ_2 durch Vernachlässigung der Reibung von der Größenordnung $(\alpha R)^{-1}$, also immer sehr klein; dagegen ist der Fehler in φ_3 von der Größenordnung $\varepsilon \frac{U_0''}{U_0'}$ im ungünstigsten Falle 0,055.

Diese Überslagsbetrachtung der Fehler unserer Näherung lehrt, daß unsere Rechnung die physikalisch grundsätzlichen Züge durchaus richtig wiedergibt, zugleich aber, daß bei den letzten Durchgangspunkten (kleine Reynoldssche Zahlen) die Zahlenwerte der Störungsparameter und von ε mit Fehlern von einigen Prozent

1) Die beiden auf der rechten Seite von (19) nicht angeschriebenen Reibungsglieder $\varepsilon^2 2\alpha^2 i\varphi_2''$ und $-\varepsilon^4 \alpha^4 i\varphi_2$ könnten wir leicht noch mit in die folgende Betrachtung nehmen; doch ändern sie in unserem Falle noch nicht merklich die Übergangssubstitution.

2) Über das Abklingen der inneren Reibungsschichtlösung vgl. für den einfachsten Fall die Anmerkung in § 3 S. 29.

behaftet sind, was sich besonders bei der Bestimmung von R aus ε auswirkt.

Es mag überraschen, daß in unserer Rechnung das Geschwindigkeitsprofil an der Platte nur von y abhängig angenommen wurde, während in Wirklichkeit dort auch eine, allerdings schwache Abhängigkeit von x besteht. Nun läßt sich zeigen, daß die Berücksichtigung dieser Abhängigkeit bei der Strömung an der Platte nur Glieder der Größenordnung $(\alpha R)^{-1} \varphi'''$, $(\alpha R)^{-1} \varphi'$, $(\alpha R)^{-1} \alpha^3 \varphi'$ und noch kleinere hineinbringt, also scheinbare neue Reibungsglieder auftreten, die in unserer Rechnung sehr wenig ausmachen. Da diese Betrachtung sich für eine ganze, wichtige Klasse von Profilen, die „Grenzschichtprofile“ (vgl. den Literaturnachweis in Fußnote 2) Seite 35), allgemein durchführen läßt, sei an dieser Stelle nur dieser Hinweis gegeben.

4. Bei der Angabe der Ergebnisse unserer Berechnung der Durchgangspunkte wollen wir die bisher abgekürzten Dimensionslosen voll ausschreiben. Anstatt der vorher verwandten, ziemlich willkürlich bestimmten Bezugslänge (halbe Breite einer gewissen, in das Profil eingezeichneten Parabel) wollen wir eine physikalisch sinnvolle Bezugslänge einführen. Die Bestimmung einer charakteristischen Länge aus dem vorliegenden ebenso wie aus anderen Grenzschichtprofilen ist durch den asymptotischen Anschluß an die ungestörte Geschwindigkeit erschwert, sodaß auch fast alle bisherigen Definitionen der „Grenzschichtdicke“ nicht rationell sind. Frei von Willkür, experimentell genau bestimmbar und den Gesamtverlauf des Profils berücksichtigend ist nur die Definition der Grenzschichtdicke:

$$(20) \quad \delta = \int \left(1 - \frac{U}{U_m}\right) dy,$$

wobei das Integral von der Wand bis zur ungestörten Potentialgeschwindigkeit U_m zu erstrecken ist. Diese Länge, früher auch Verdrängungsdicke, hier aber schlechthin Grenzschichtdicke genannt, gibt, wenn man sie mit U_m multipliziert, gerade das Maß für die Verringerung der Durchflußmenge durch die Grenzschichtreibung. δ ist in unserem Falle das 0,341-fache unserer früheren Bezugslänge. Als Reynoldssche Zahl R nehmen wir also $\frac{U_m \delta}{\nu}$.

Nach unserer Ermittlung der Durchgangspunkte gehören zu jedem R je zwei Störungsparameter, bis daß zu der letzten kritischen Reynoldsschen Zahl 420 nur je ein Störungsparameter gehört. Die Abb. 4 und 5 zeigen die Störungsparameter $\alpha \delta$, $\frac{c}{U_m}$,

$\frac{\beta \delta}{U_m}$ in Abhängigkeit von den logarithmisch aufgetragenen R . Das von diesen Kurven umschlossene Gebiet gibt offenbar den Bereich der labilen Schwingungen an. Der Zeiger r bei β und c soll andeuten, daß die Diagramme nur über den reellen Teil dieser Größen Auskunft erteilen.

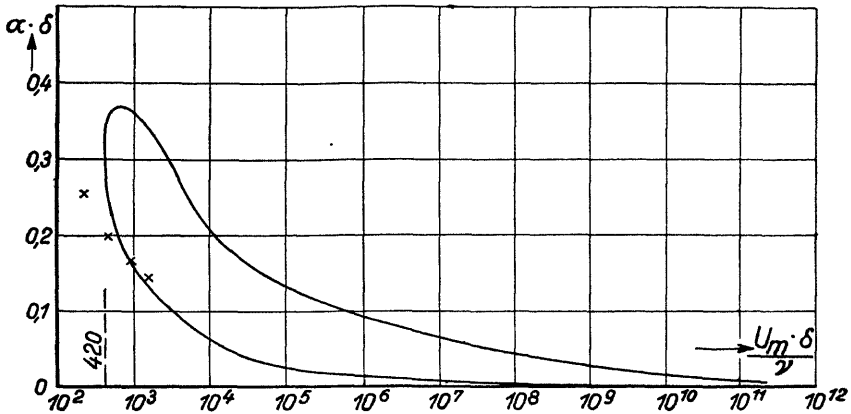


Abbildung 4.

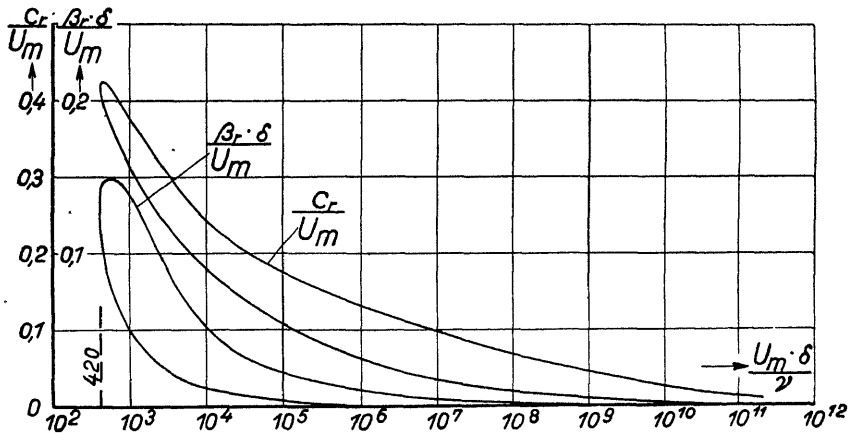


Abbildung 5.

Hier seien einige Durchgangspunkte, wie sie sich aus unserer Rechnung an Abb. 3 ergeben, zahlenmäßig angeben:

$\frac{c}{U_m}$	$\alpha \delta$	$\frac{\beta \delta}{U_m}$	R
0,4	0,272	0,109	445
0,4	0,368	0,147	716
0,2	0,076	0,015	7330
0,2	0,160	0,032	34800

Ferner seien noch einmal in unserer jetzigen Darstellung die Formeln für ganz große R angegeben, obwohl sie physikalisch kaum noch wichtig sind:

$$\frac{c}{U_m} = \left(\frac{R}{15,7}\right)^{-\frac{1}{4}}, \quad \alpha\delta = 0,252 \frac{c}{U_m}$$

und für den anderen Zweig der Gleichgewichtskurve:

$$\frac{c}{U_m} = \left(\frac{R}{0,0053}\right)^{-\frac{1}{10}}, \quad \alpha\delta = 0,573 \frac{c}{U_m}.$$

Wir stellen zunächst fest, daß ein außerordentlich schmaler Bereich von Schwingungen für die Laminarströmung gefährlich wird. Ebenso wie für die R eine untere Grenze 420 existiert, gibt es für die Störungsparameter eine obere Grenze, nach deren Überschreitung keine Labilität mehr eintritt: $\frac{c}{U_m} = 0,425$, $\alpha\delta = 0,367$,

$\frac{\beta\delta}{U_m} = 0,148$. Besonders auffallend sind die im Vergleich zur Grenzschichtdicke großen Wellenlängen λ der Störung; λ ist ja $\frac{2\pi}{\alpha}$, also ist das kleinste $\lambda = \frac{2\pi}{0,367} \delta = 17,1\delta$. Auch gewisse Beobachtungen von PRANDTL an dem eingangs erwähnten Gerinne, bei dem ganz vorne die Strömung etwas ähnlich der Plattenströmung ist, scheinen auf solche großen Wellenlängen zu deuten. Da δ längs der Platte wächst, ist es vielleicht zweckmäßig, auch eine Grenze von λ anzugeben, die von x unabhängig ist. Nach Abb. 4 gehört zu jedem $\frac{U_m\delta}{\nu}$ ein gewisser Bereich labiler $\alpha\delta$. Aus

$\alpha\delta$ und $\frac{U_m\delta}{\nu}$ läßt sich nun δ eliminieren, und wir können demnach das größtmögliche labile α oder das kleinstmögliche λ bei gegebenem U_m und ν ermitteln. Das kleinstmögliche labile λ ist $8400 \frac{\nu}{U_m}$; dies λ entspricht annähernd gerade der stationären Schwingung bei $R = 420$. Wenn man die Plattenlänge von der Vorderkante bis zur Stelle $R = \frac{U_m\delta}{\nu} = 420$ mit l_1 bezeichnet, so ist $l_1 = 59000 \frac{\nu}{U_m}$, da $\delta = 1,73l \sqrt{\frac{\nu}{U_m l}}$ ist; das obige λ ist also $\frac{l_1}{7}$.

TJETJENS hat l. c. ein Profil auf Stabilität untersucht, das von der Wand linear bis U_m ansteigt und dann mit einem Knick sich konstant fortsetzt. Dies Profil ist also als eine rohe Approximation des unseren anzusehen. Die von TJETJENS berechneten Durchgangspunkte sind seiner Abbildung 17 entnommen und teilweise in

unsere Abb. 4 mit Kreuzen eingetragen, wobei b_1 bei TIETJENS gleich 2δ ist. TIETJENS bekommt den einen Zweig der Gleichgewichtskurve in recht guter Näherung. Da er jedoch nur diesen einen Zweig erhält, so bekommt er demnach auch keine Grenze für R noch für $\alpha\delta$, was an dem durchgängigen Verschwinden der Krümmung des TIETJENSschen Profiles liegt.

Die Stabilität von Profilen mit Krümmung hatte HEISENBERG in einer Arbeit¹⁾ zu untersuchen unternommen. Im allgemeinen nimmt HEISENBERG $\alpha = 0$ an; die Frage der Konvergenz der Entwicklung der Lösungen nach α wird nicht geklärt. Die Übergangssubstitution für φ_2 (bei HEISENBERG φ_1) wird auf andere und nicht ganz zwingende Weise abgeleitet. Der Zahlenwert des Phasensprunges stimmt in seinem speziellen Falle mit dem unseren überein. Bis zur Durchrechnung eines Profiles ist HEISENBERG nicht vorgedrungen und hat sich auf Vermutungen beschränkt, die teilweise — bezüglich der Existenz einer oberen Grenze für α und einer unteren Grenze für R — in ähnlicher Richtung liegen wie unsere Ergebnisse an dem speziellen Profil der Strömung längs der Platte.

5. Die Gegenüberstellung unserer Ergebnisse mit Experimenten, wie sie insbesondere von BURGERS und VAN DER HEGGE ZIJNEN²⁾ und von HANSEN³⁾ vorliegen, ist aus zwei Gründen unvollkommen. Erstens weiß man nicht über die in Wirklichkeit auftretenden Störungen Bescheid, dann ist es auch nicht klar, wie weit der von diesen Autoren definierte Umschlagspunkt mit unserem Labilitätsbeginn der Laminarströmung übereinstimmt. BURGERS und ähnlich auch HANSEN definieren den Umschlagspunkt in folgender Weise. Vorn an der Platte gibt es ja ein laminares Stück, das sich nach PRANDTL-BLASIUS ausbildet; nach dem Umschlag gibt es ebenso einen ausgesprochen turbulenten Teil, dessen Gesetze von PRANDTL und von KÁRMÁN (1/7 Potenzgesetz usw.) aufgeklärt wurden. In beiden Bezirken nimmt der Geschwindigkeitsgradient unmittelbar an der Wand beim Fortschreiten stromabwärts stets ab, nur im Übergangsgebiet erfolgt eine Zunahme. Die kritische Reynoldssche Zahl wird nun einfach aus der Stelle des Minimums des Geschwindigkeitsgradienten berechnet, während die Instabilität der Laminar-

1) W. HEISENBERG: Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen. Ann. d. Phys. IV, Bd. 74, S. 597, 1924.

2) I. M. BURGERS: Proc. of the First Intern. Congress for Applied Mechanics Delft 1924, S. 113.

B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN: Thesis Delft 1924.

3) M. HANSEN: Zs. f. angew. Math. u. Mech. 8, S. 185, 1928.

strömung wahrscheinlich doch schon früher, bei kleineren δ , also bei kleinerem R einsetzen dürfte. Daher dürfen wir höchstens eine Bestätigung der Größenordnung unserer berechneten kritischen Reynoldsschen Zahlen erwarten. Es ist zu beachten, daß die Grenzschichtdicke dieser Autoren das 3,18-fache der unseren ist. Im Mittel erhielten sie in unserem Maß eine kritische Reynoldssche Zahl um 950¹⁾ (aus ihrem Wert 3000 umgerechnet), während sie bei mehr Störung bis zu 500 (bei einem unmittelbar an der Plattenschneide in den Strom eingesetzten Störungssieb) herunterkamen. Wenn wir bedenken, daß bei unserer Rechnung bei 420 gerade noch eine einzige Partialschwingung existierte, die nicht gedämpft wurde, während beim experimentell ermittelten Umschlagspunkt wohl schon ein ziemlich erhebliches Anwachsen von kleinen Störungen erfolgt ist, so wird man unter Berücksichtigung der vorhergehenden kritischen Bemerkungen sagen können, daß unsere Rechnungsergebnisse mit den Experimenten in recht gutem Einklang stehen.

Gerade für den Vergleich mit den Experimenten erscheint es wichtig, die Größe der Anfachung bzw. Dämpfung und auch die Verteilung der Schwingungsamplitude zu kennen. Diese und andere Fragen, besonders auch das Verhalten anderer Profile sollen in einer zweiten Mitteilung behandelt werden.

1) Da unser $R = \frac{U_m \delta}{\nu} = 1,73 \sqrt{\frac{U_m l}{\nu}} = 1,73 \sqrt{R_l}$, wo l die Plattenlänge von der Vorderkante aus ist, so entspricht dieser Zahlwert einem R_l von 300 000.
